实数完备性与确界存在定理

有理数

一切形如 $\frac{q}{p}(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+)$ 的数叫有理数

有如下性质：

1. 对有理运算封闭
2. 有序
3. 稠密
4. 不完备

实数

实数弥补了有理数不完备的缺陷，即：**实数集与坐标轴上的点一一对应**。

集合的有界性

有界

- 上有界：$\exists L \in \mathbb{R}, s.t. \forall x \in A, x \leq L$
- 下有界：$\exists L \in \mathbb{R}, s.t. \forall x \in A, x \geq L$
- 有界：同时有上下界，即 $\exists M > 0, s.t. \forall x \in A, |x| \geq M$

确界

- 上确界：设 $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$，若存在 $s \in \mathbb{R}$，满足：
    i. $\forall x \in A, x \leq s$

    ii. $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A, x_0 > s$

  被记为 $\sup A = s$

- 下确界：仿照上确界，记作 $\inf A$
- 上确界是最小上界，下确界是最大下界。
- 上下确界是唯一的。（可以反证，若有 $s_1 \neq s_2$，则 $\frac{s_1+s_2}{2}$ 构成矛盾）
- 上下确界可以不在数集中。

确界存在定理

任何有上界的非空实数集，一定有上确界，且其上确界仍是实数。

对下确界依然成立。但在有理数集上不成立。这也是刻画实数集完备性的定理。

映射与函数

映射

设 A, B 非空，若 $\forall x \in A, \exists y \in B$ 与 x 按照某种规则 f 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的一个映射。

记为 $f : A \to B$ 或 $f : x \mapsto y, x \in A, y \in B$

映射也被称为算子。若 B 是数集，也被叫做泛函。

A 中元素被称为原象，A 为定义域；B 中元素被称为象，B 为值域。

函数

定义域和值域都为数集的映射叫做函数。

高等数学是研究函数的数学。

定义域?

使得函数表达式有意义的一切（实数？）。

基本初等函数

初等函数是可以用一个表达式表示的函数。

1. 常函数
2. 幂函数

3. 指数函数
4. 对数函数
5. 三角函数
6. 反三角函数

（函数 f 图像被记作 $Gr\{f\}$）

分段函数

分段函数也可能是初等函数。

如：

$$y = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases} = 1 - |1 - x|$$

特殊函数

1. 符号函数 sgn
2. 高斯函数 $\operatorname{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$
3. 狄利克雷函数 $\operatorname{Dirichlet}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
4. 最值函数 $\max, \min$
5. 线性函数 $y = kx + b$

复合函数

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$

反函数

如果函数 f 可逆，则将其反函数记作 f^{-1}，满足：$f^{-1}(f(x)) = x$。

如果 f 不是单调的，整体上没有反函数，但是可以分成单调分支，在每个分支上求反函数。

另外 $f \circ f^{-1}$ 与 $f^{-1} \circ f$ 可能不是同一函数，因为定义域不同。

双曲函数

考虑欧拉定理：

$$\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$$

我们去掉所有虚数单位，得到双曲函数：

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

同样可以定义双曲正切等：$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

双曲函数有一些和三角函数很像的性质：

$$\begin{aligned}\sinh(x\pm y)&=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\\\cosh(x\pm y)&=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\\\cosh^2 x-\sinh^2 x&=1\\\sinh 2x&=2\sinh x\cosh x\\\cosh 2x&=\cosh^2 x+\sinh^2 x\end{aligned}$$

同样，他们也有对应的反函数。

$$\begin{aligned}\operatorname{arsh} x&=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\\operatorname{arch} x&=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\\operatorname{arth} x&=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

数列与极限

数列

高等数学中研究的数列都是无穷数列。

对于函数 f 在 $\mathbb{Z}_+$ 上的每处取值 $a_n=f(n)$，按照正整数的顺序排列出来，得到的 $a_1,a_2,\ldots,a_n\ldots$ 称为一个数列，记作 $\{a_n\}$。a_n 为该数列的通项。

1. 数列对于数轴上的一个点列。
2. 数列是一个整标函数：$x_n=f(n)$。

极限的概念

“割圆术”

数列的极限

观察到 n 无限增大时，$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于 1。

怎么精确定义?

使用和 $\sup$ 相似的思想:

如果 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}, s.t. \forall n > N, |x_n - v| < \epsilon$，则称数列 x_n 的极限为 v。

记作 $\lim\limits_{n \to +\infty} = v$ 或当 $n \to +\infty$，$x_n \to v$。

如果数列没有极限，我们称数列为发散的。

几何解释

对于 v 的任意小邻域，x_n 对应的点列最终都会落到邻域内部。

例题

太简单了，略

收敛的性质

1. 唯一性。可用反证法：假设有两个极限 a_1, a_2，取 $\epsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$，当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，a_n 同时大于和小于 $\frac{a_1 + a_2}{2}$，矛盾。
2. 收敛的数列必定有界。
   证明：有限项必然有界；一定存在 N，使得 $\forall n > N, a_n \in (v-1, v+1)$，则 N 前 N 后都有界。
   反过来不成立。但是无界数列必不收敛。
3. 有理运算法则：如果 $\lim a_n, \lim b_n$ 都存在，那么 $\lim a_n + b_n = \lim a_n + \lim b_n$，$\lim a_n - b_n = \lim a_n - \lim b_n, \lim a_n \times b_n = \lim a_n \times \lim b_n$，$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$。

有理运算法则的证明

以加减为例:

$\forall \epsilon > 0$，取使得 $|a_n - a| < \frac{2}{\epsilon}, |b_n - b| < \frac{2}{\epsilon}$ 的 N_a, N_b，则 $n > \max(N_a, N_b)$ 时，$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \geq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$，即 $\lim a_n \pm b_n = a \pm b$。

乘法取 $\sqrt{\epsilon}$ 即可。

只能推广到有限个极限。

保号性

若 $\lim a_n = a \neq 0$，则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$，使得 $\forall n > N, a_n \cdot a > 0$。

这个比较显，就是概念。

保序性

若 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, a_n \leq b_n$ 且 $\lim a_n = a, \lim b_n = b$，则 $a \leq b$。

证明也简单，显然 $\lim b_n - a_n = b - a$，再由保号性得到 $(b_n - a_n)(b - a) \geq 0$，所以 $b \geq a$。注意保号性没有 0 的情况，需要特殊处理。

夹逼性

若 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, a_n \leq b_n \leq c_n$，且 $\lim a_n = \lim c_n$，则 $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$。

运用两次保序性自然得到。

例题

6

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &= \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1} \\ &= 2\end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3+1} &= \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{2+\frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>0)\\
a>1:&\\
&\sqrt[n]{a}=1+h_n(h_n>0)\\
&a=(1+h_n)^n\geq 1+nh_n\\
&h_n\leq\frac{a-1}{n}\\
&\lim h_n=0\\
&\lim\sqrt[n]{a}=1\\
a<1:&\\
&\lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1\\
&\lim\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1
\end{aligned}
$$

收敛准则

单调有界准则

如果数列 $\{a_n\}$ 单调增（减）有上（下）界，则 a_n 必然收敛。

在实数域上，根据实数确界原理，$\{a_n\}$ 所构成集合必有上确界 a。

则 $\forall\epsilon>0$，存在 $a_x\in(a-\epsilon,a]$。

又因为单调增，$\forall n\geq x,a_n\in(a-\epsilon,a]$。

立刻得到 $\lim a_n=a$。

同理可证单调减。

“一个重要极限”

$e.g.$ 证明 $(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛：

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+n\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\
&< 1+1+...+\frac{1}{n!}\prod\left(1-\frac{i}{n+1}\right) \\
&< (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}
\end{aligned}
$$

即单调。

注意到：

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+n\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\
&< 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n-1)n} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

即有界。

所以 $(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛。我们记 $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$。

等价性定义

e 的值有多种等价的表述。一种是定义 $\exp(x)$ 为导数等于自身并且 $\exp(0)=1$ 的函数，再定义 $e=\exp(1)$；另一种是定义 $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x}=1$。这些定义等学到导数、积分时再描述。这里阐述一个级数定义：

$$
e=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}
$$

这实际是 $\exp$ 在 1 处的泰勒展开。

我们希望证明，上述两种定义是等价的，即：

$$
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=e
$$

我们已经知道：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{1}{n^i}\leq\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$$

另一方面，对于任意有限 m，当 $n\geq m$ 时，有：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{1}{n^i}$$

令 $n\to\infty$，则：

$$e\geq\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}$$

综合来说，我们有：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\leq e$$

左右两端趋向同一极限 e，由夹逼性质，得到：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=e$$

无理性证明

假设 $e=\frac{p}{q}$，即：

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\\ p(q-1)!&=\sum_{i=0}^{q}\frac{q!}{i!}+q!\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!}\\ &\leq\sum_{i=0}^{q}\frac{q!}{i!}+\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}\\ &\leq\sum_{i=0}^{q}\frac{q!}{i!}+\frac{1}{q+1}\end{aligned}$$

然后发现前面的 $q+1$ 项都是整数，但是后面的余项是小于 $\frac{1}{q+1}$ 的小数。难道说 $p(q-1)!$ 是小数吗？显然矛盾。因此 e 一定是无理数。

归并原理

子数列

在数列 $\{x_n\}$ 中抽取可数无穷多项并保持相对关系，构成的新数列被称为 $\{x_n\}$ 的一个子列。

即：子列 $y_n = x_{p_n}$，$\forall i \in \mathbb{Z}_+$ 有 $p_i < p_{i+1}, p_i \in \mathbb{Z}_+$。

显然，$p_i \geq i$。

性质

收敛数列的任意子列收敛，且子数列的极限值与原数列相同。

证明简单，$\forall \epsilon > 0$，若 $n > N$ 时 $x_n \in U_\epsilon(x)$，因为 $p_N \geq N$，所以 $x_{p_n} \in U_\epsilon(x)$，即 $y_n \in U_\epsilon(x)$，说明 y_n 也收敛。

这个证明还说明，子列收敛速度不会慢于原数列。

逆否

如果存在某个发散子列，则原数列必然发散。

如果两个子列收敛到不同的值，则原数列必然发散。如 $x_n = (-1)^n$。

推论

- 对数列增删有限项，不影响原数列极限的存在性，也不影响极限值。
  因为有限项必然有最后一项，只要让原来的 N 和这个最后一项取 $\max$ 就没有影响。
- 如果一个数列的奇数项和偶数项组成的两个子列收敛于同一个值，则原数列收敛。
  可以从定义直接证明。（三分四分也可以）

闭区间套定理

如果闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$，有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，且 $\lim(b_n - a_n) = 0$，则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套或区间套。

闭区间套定理在说，对于一个闭区间套，存在唯一实数 ξ 满足 $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \xi \in [a_n, b_n]$。

证明：显然 a_n 单调增且有上界 b_1，所以 a_n 有极限，不妨记作 ξ。

同理，b_n 也有极限，且 $\lim b_n = \lim a_n + \lim(b_n - a_n) = \xi$。

单调有界原理的证明中已经说明 ξ 是 a_n 上确界，b_n 下确界，所以 $\xi \in [a_n, b_n]$。

最后若还有 $\xi' \in [a_n, b_n]$，我们有 $0 \le |\xi - \xi'| \le b_n - a_n$，由夹逼定理得到 $\xi = \xi'$。说明 ξ 唯一。

weierstrass 定理

有界实数列必然有收敛的子列。

证明：假设数列的界是 $[a_1, b_1]$。对区间 $[a_i, b_i]$，取 $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$，则在 $[a_i, m_i]$ 和 $[m_i, b_i]$ 中必有一个区间包含了原数列的无穷多项（可以反证）。将那个区间记为 $[a_{i+1}, b_{i+1}]$。

这样，构成的所有 $[a_i, b_i]$，满足 $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$，且区间长度每次减半收敛至 0，构成一个闭区间套。那么必恰有一个 ξ 在所有区间中。

接下来，构造 y_i 为 $[a_i, b_i]$ 中包含的某个原数列元素，且它的下标比 $y_1, ..., y_{i-1}$ 对应的下标都要大。因为每个区间都包含了原数列无穷多项，所以总能找到这样的 y_i。

则有 $a_i \le y_i \le b_i$，$\{y_n\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子列。

最后，运用夹逼定理，得到 $\lim y_n = \xi$。

我们将数列的某一子列的极限称为收敛点。 weierstrass 定理就是说，有界实数列必然有收敛点。

柯西数列

如果 $\{a_n\}$ 为一个实数列，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{Z}_+$，使得 $\forall n, m > N$，恒有 $|a_n - a_m| < \epsilon$，则 $\{a_n\}$ 被称为 Cauchy 数列。

一个数列收敛的充要条件是它为 Cauchy 数列。

必要性

较为容易。对于 $\epsilon > 0$，我们取使得 $x_n \in U_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ 的 N，自然有 $|x_n - x_m| < \epsilon$，因为他们都在长度为 ϵ 的开区间里。

充分性

取 $\epsilon = 1$，当 $n > N_\epsilon$ 时，x_n 有界；前 N 项必然有界（有限项有界）。所以 Cauchy 数列必然有界。这样它必有一个收敛点。不妨记作 ξ。下面证明收敛性：

$\forall \epsilon > 0$，取 N_0 使得对于 $n > N_0$，收敛子列 $y_n \in U_{\frac{\epsilon}{2}}(\xi)$。

接下来取 N_1 使得对于 $n,m>N_1$，$|x_n-x_m|<\frac{\epsilon}{2}$。

这样由于子列有无穷项，必然存在 $k>\max(N_0,N_1)$，使得 x_k 在子列 y 中，则 $x_k\in U_{\frac{\epsilon}{2}}(\xi)$。

所以 $\forall n>\max(N_0,N_1)$，$|x_n-x_k|<\frac{\epsilon}{2}$ 且 $|x_k-\xi|<\frac{\epsilon}{2}$，所以 $|x_n-\xi|<\epsilon$。即 $\{x_n\}$ 收敛。

否命题

既然是充要条件，Cauchy 数列也可以用来判断发散。

例题

1

求 $\lim\frac{a^n}{n!}$：

当 $a>0$：

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}$，当 $n>a$ 时，x_n 单调递减，又有下界 0，所以 x_n 收敛。

注意到 $x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n$，且这三项的极限都存在。使用有理运算法则：$\lim x_{n+1}=0\lim x_n$。所以极限为 0。

$a=0$ 时显然。

$a<0$ 时我们有 $-\frac{|a|^n}{n!}\leq\frac{a^n}{n!}\leq\frac{|a|^n}{n!}$，运用夹逼定理可知。

综上：$\lim\frac{a^n}{n!}=0$。

2

证明 $x_1=\sqrt{3},x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$ 有极限，求这个极限。

我们知道 $x_1<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$。若 $x_i<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，则 $x_{i+1}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$。由数学归纳法得到 $x_n<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$。

又因为 $\sqrt{3+x_n}-x_n=\frac{3+x_n-x_n^2}{\sqrt{3+x_n}+x_n}>0$，所以 x_n 单调增。

所以 x_n 有极限。$(\lim x_n)^2=3+\lim x_{n-1}$，所以 $\lim x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$。

3

证明 $x_n=\prod_{i=1}^n\frac{2i-1}{2i}$ 收敛，求其极限。

显然单调减有下界0。但是，此时，$x_n = \frac{2n-1}{2n} x_{n-1}$，无法使用有理运算法则。

不妨考虑 $y_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}$，注意到 $x_n < y_n$，$0 < x_n^2 < x_n y_n = \frac{1}{2_n+1}$。

所以 $(\lim x_n)^2 = \lim x_n^2 = 0$，即 $\lim x_n = 0$。

4

证明 $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n-1}}$ 收敛，并求其极限。

注意到当 $x_i < \sqrt{2}$ 时，$x_{i+1} > \sqrt{2}$，反之，$x_i > \sqrt{2}$ 时，$x_{i+1} < \sqrt{2}$。所以考虑 x_n 的两个子列 $\{x_{2n}\}, \{x_{2n-1}\}$：

$$\begin{aligned} x_{2n} &> \sqrt{2} \\ x_{2n} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x_{2n-2}}} = \frac{4+3x_{2n-2}}{3+2x_{2n-2}} \\ \frac{x_{2n}}{x_{2n-2}} &= \frac{3+\frac{4}{x_{2n-2}}}{3+2x_{2n-2}} < 1 \\ x_{2n} &< x_{2n-2} \end{aligned}$$

同理可得 $x_{2n+1} > x_{2n-1}$。则两个子列都有极限。

最后解 $\lim x_{2n} = \frac{4+3\lim x_{2n-2}}{3+2\lim x_{2n-2}}$，得到 $\lim x_{2n} = \sqrt{2}$。同理，$\lim x_{2n-1} = \sqrt{2}$。

根据归并原理，$\lim x_n = \sqrt{2}$。

5

若 x_n 单调增，y_n 单调减，且 $\lim(x_n - y_n) = 0$。

则 $\exists N \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\forall n > N, x_n - y_n \le 1$，$x_n \le y_n + 1 \le y_1 + 1$。则 x_n 单调增有上界。所以 x_n 有极限。

然后使用有理运算法则：$\lim y_n = \lim x_n - \lim(x_n - y_n) = \lim x_n$。

函数的极限

概念

自变量趋向无穷大时函数的极限

如果 $\forall\epsilon>0$，$\exists M\in\mathbb{R}_+$，使得 $\forall x>M,|f(x)-v|<\epsilon$，则我们说：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=v$$

同理，若 $\forall x<-M,|f(x)-v|<\epsilon$，则：

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=v$$

将两者统一，即 $\forall|x|>M$，$|f(x)-v|<\epsilon$，我们称：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=v$$

水平渐近线

如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)=c$，称 $y=c$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线。

自变量趋向有限值时函数的极限

如果 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)\cap D(f)$ 时，$f(x)\in U_\epsilon(v)$，则称：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=v$$

其中 $D(f)$ 为 f 定义域。

这个很重要！比如 $f(x)=\sqrt{x}$，$\sqrt{x}-\sqrt{x_0}=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\le\left|\frac{\delta}{\sqrt{x_0}}\right|$。

如果我们此时草率地取 $\delta=\epsilon\sqrt{x_0}$，就有可能出现 $x_0-\delta<0$ 导致未定义的情况。

正确的做法是取 $\delta=\min(\epsilon\sqrt{x_0},x_0)$。

注意到我们使用了 $\mathring{U}$ 去心邻域符号，说明 x_0 处的极限值和 x_0 处的实际值是无关的。即使 $f(x_0)$ 未定义也没关系。

单侧极限

对于一些函数，可能无法用同一个表达式表达 $\mathring{U}_\epsilon(x_0)$ 处的函数值。比如分段函数的转折点。求极限时，我们可以从 x_0 的左右两边分别求极限。

当 x 从左侧靠近 x_0，我们记作 $x \to x_0^-$；反之右侧记作 $x \to x_0^+$。

从左侧靠近时，我们将极限定义改造如下：

若 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$，$|f(x) - v| < \epsilon$，则我们称 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = v$。

右极限同理。

从定义出发，不难得到，如果函数在某处的左右极限存在且相等，等价于函数在该点极限存在，并与左右极限相等。

e.g

$f(x) = \frac{x}{|x|}$。当 $x \to 0^+$：$f(x) = \frac{x}{x} = 1$；当 $x \to 0^-$，$f(x) = \frac{x}{-x} = -1$。则左右极限存在但不相等，说明 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在。

Heine定理

设 $f : \mathring{U}(x_0) \to \mathbb{R}$，对于 $\mathring{U}(x_0)$ 中的**任何**收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，有数列 $\{f(x_n)\}$。

有如下定理：对于任何满足 $\lim x_n = x_0$ 的数列有 $\lim f(x_n) = v$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = v$。

这就是**Heine定理**。

必要性

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = v$，则 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$，$f(x) \in U_\epsilon(v)$。

由于 $\lim x_n = x_0$，则存在 $N \in \mathbb{N}_+$，使得 $\forall n > N$，$x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$。

综上，$n > N$ 时，$f(x_n) \in U_\epsilon(x_0)$，即 $\lim f(x_n) = v$。

充分性

假设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq v$，则 $\exists \epsilon > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$，使得 $f(x) \notin U_\epsilon(v)$。

不妨构造函数 $x(\delta)$，表示 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，让 $f(x) \notin U_{\epsilon_0}(v)$ 的 x。

构造 $\{(\delta_n, x_n)\} = \{(\min\{\frac{1}{n}, |x_{n-1} - x_0|\}, x(\delta_n))\}$。显然，由于 $\delta_n \leq \frac{1}{n}$，$\lim \delta_n = 0$。又由 $x(\delta)$ 的定义，$x_n - x_0 \in (-\delta_n, \delta_n)$，则 $\lim x_n = x_0$。此时我们发现，$\forall x_n, f(x_n) \notin U_{\epsilon_0}(v)$，说明 $f(x_n)$ 不收敛于 v，矛盾。

因此假设不成立。

逆否命题

显然我们无法通过验证不可数无穷多个数列来验证极限。所以 Heine 定理更大的作用是判断函数不收敛，即存在两个数列收敛于不同的极限。

极限的统一

数列是特殊的整标函数。所以我们之后统一研究数列和函数极限的性质。

有理运算法则：

若 $\lim f(x) = a$，$\lim g(x) = b$。

$$\begin{gathered}
\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm g(x) = a \pm b \\
\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = ab \\
\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b}(b \neq 0)
\end{gathered}$$

可复合有限次。

唯一性

若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一。否则假设有两个极限 a, b，则当 $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ 时，同时有 $f(x) > \frac{a+b}{2}$ 和 $f(x) < \frac{a+b}{2}$，矛盾。

或者可以考虑归并原理：如果 $\lim f(x)$ 存在，则任意子列既收敛于 a，又收敛于 b，与数列极限的唯一性矛盾。

局部有界性

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = v$，则 $\exists \delta > 0, f(x)$ 在 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时是有界的。

比如取 $\epsilon = 1$，则 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_\delta(x_0)$ 内有上界 $v + 1$，下界 $v - 1$，此即局部有界。

局部保号性

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = v \neq 0$，则 $\exists \delta > 0$，使得 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$f(x)v > 0$。

证明取 $\epsilon = \frac{|v|}{2}$。

局部保序性

若 $\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$，则 $a \leq b$ 的充要条件为 $\exists \delta > 0$，使得 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$f(x) \leq g(x)$。

必要性证明取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$。

充分性证明直接用定义。

同时注意等号。

夹逼性

设 $\lim f(x) = \lim h(x) = v$。

若 $\exists \delta > 0$，使得 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$，则 $\lim g(x) = v$。

证明容易：一种是 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta_1, \delta_2 > 0$，使得 $x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0)$ 时，$f(x) \in U_\epsilon(v)$；$x \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$ 时，$h(x) \in U_\epsilon(v)$。则取 $\delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$，当 $x \in \mathring{U}_{\delta'}(x_0)$ 时，$g(x) \in U_\epsilon(v)$。所以 $\lim g(x) = v$。

另一种思路是归并原理。对于任意 $\{x_n\}$ 满足 $\lim x_n = x_0$，都有 $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$，由数列的夹逼准则得到 $\lim g(x_n) = v$。由于此性质对所有 $\{x_n\}$ 都成立，所以由归并原理得到 $\lim g(x) = v$。

复合法则

设 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$。

若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = v$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = v$。注意前两个极限要都存在。

有一个重要的条件：$\exists \delta > 0$ 当 $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$g(x) \neq u_0$。

为什么呢？极限实际是在描述一个动态“靠近”的过程，和那一点的值是无关的，如果内层的 $g(x) \equiv u_0$，对于外层的 $f(u)$ 就压根没有变化，不构成极限的定义，还会直接取到 $f(u_0)$,它不一定等于 $\lim f(u)$，甚至不一定有定义。

使用归并原理证明比较简单：对于任意 $\lim x_n = x_0, x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$，有 $\lim g(x_n) = u_0$，则有 $\lim f(g(x_n)) = v$。因为 $g(x) \neq u_0$，所以 $\{g(x_n)\}$ 是 $\mathring{U}(u_0)$ 内的数列。根据 Heine 定理，自然得到 $\lim (f \circ g)(x) = v$。

注意 $\lim f(g(x)) = \lim f(\lim g(x)) \neq f(\lim g(x)) \neq f(g(x))$。

两个重要极限

一个

我们已经在之前说明了一个重要极限：

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

但是这是对于数列而言。能否推广到实数情况？即证：

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

分开来讨论。

- $x \to +\infty$：

  $$\left(1 + \frac{1}{\lceil x \rceil}\right)^{\lfloor x \rfloor} \leq \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lceil x \rceil}$$

  左右都是整数的情况，极限都是 e，由夹逼定理得证。
- $x \to -\infty$：

  $$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(\frac{-x-1}{-x}\right)^x \\ &= \left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x} \\ &= \left(1 + \frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\end{aligned}$$

  由于 $-x-1 \to +\infty$，得证。

另一个

另一个重要极限如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

来考虑它的证明：从 $\sin,\tan$ 的几何定义中，我们不难发现，在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，有：

$$\sin(x)<x<\tan x$$
$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

立即想到使用夹逼法则。但是别急，我们还没有证明连续函数可以直接代入得到极限，所以没有证明 $\lim\cos x=1$。也不难：$|1-\cos x|=\left|\frac{\sin^2 x}{2}\right|\le\frac{1}{2}x^2$，我们取 $\delta=\sqrt{2\epsilon}$ 得证 $\lim(1-\cos x)=0$，再用有理运算法则。

得到 $\lim\frac{x}{\sin x}=1$。

同时还能有：$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$。

单调有界准则

无穷远处极限

设 $f(x)$ 单调增有上界，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sup f(x)$。

证明：因为有上界，必有上确界。$\forall\epsilon>0$，$\exists x_0$ 使得 $\sup f(x_0)\ge f(x_0)>\sup f(x)-\epsilon$，又因为 f 单调增，所以当 $x>x_0$ 时，$f(x)\in U(\sup f(x))$。即证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sup f(x)$。

同理可证 $f(x)$ 单调减有下界时 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\inf f(x)$。

单侧极限

设 $f(x)$ 是区间 I 上的单调函数，则 $f(x)$ 在 I 内每一点的单侧极限存在。

不妨假设 $f(x)$ 单调增，$\forall x_0\in I$，显然 x_0 必有左右邻域中的一个。若左邻域存在，则 $f(x)$ 在左邻域内有上界 $f(x_0)$，则去心左邻域有上确界。用和上面相同的办法可证，左侧极限存在且等于左邻域上确界。

同理可知右邻域内右侧极限存在。

因为左右领域必有一个，所以单侧极限必然存在。

柯西收敛原理

和数列中相似：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in\mathring{U}_\delta(x_0)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$。

充分性

考虑 $\mathring{U}(x_0)$ 上收敛到 x_0 的任意两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，有 $\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}_+$，使得 $\forall n>N, x_n, y_n\in U_\epsilon(x_0)$。

这样，$\forall i,j>N$，$|f(x_i)-f(x_j)|<\epsilon$，$|f(y_i)-f(y_j)|<\epsilon$。所以 $\{f(x_n)\},\{f(y_n)\}$ 都是柯西序列。

接下来是最妙的部分，我们构造数列 $\{z_n\}=f(x_1),f(y_1),f(x_2),f(y_2),\cdots$。有 $\forall i,j>2N$，$|z_i-z_j|<2\epsilon$，所以 $\{z_n\}$ 也是柯西序列。既然 $\{f(x_n)\},\{f(y_n)\}$ 是它的两个子列，根据归并原理，他们必然收敛到统一极限！

所以我们证明，对于 $\mathring{U}(x_0)$ 上收敛到 x_0 的任意两个数列，他们对应的函数值收敛到统一极限。由 Heine 定理，自然得到 $f(x)$ 在 x_0 处收敛。

必要性

这个简单。

$\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$，有 $|f(x)-\lim f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$。

则 $\forall x_1,x_2\in\mathring{U}_\delta(x_0)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-\lim f(x)+\lim f(x)-f(x_2)|<\epsilon$。

无穷小量

当 $x\to x_0$ 时，若 $y\to 0$，则 y 称为 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

无穷小与极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=v\Leftrightarrow f(x)=v+o(x)$。其中 $o(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小。

两个方向的证明都基于有理运算法则。一个是证明 $o(x)\to 0$，一个是证明 $f(x)\to a$。

运算性质

- 在自变量同一变化过程中，有限个无穷小量的代数和或乘积仍然是无穷小量。由有理运算法则自然得到。
- 在自变量同一变化过程中，局部有界函数和无穷小量的乘积仍是为无穷小量。设 $x \in \mathring{U}(x_0), |u(x)| \leq M$，$o(x) \to 0$ 则 $|o(x)u(x)| \leq M|o(x)| \to 0$。

无穷小的阶

设 α, β 是在自变量同一变化过程中的两个无穷小。且 $\alpha \neq 0$:

考虑 $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$。若 $\lim \gamma = 0$，称 α 是 β 的高阶无穷小；若 $\lim \gamma$ 为常数，称 α 是 β 的同阶无穷小，特别地，若 $\lim \gamma = 1$，则称 α 是 β 的等价无穷小；若 $\lim \gamma = \infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小。

特别地，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^x}$，则 β 是 α 的 k 阶无穷小。

常见的等价无穷小

$x \to 0$ 时:

$$
\begin{aligned}
\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim x \\
\ln(x+1) \sim e^x - 1 \sim x \\
1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \\
\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x
\end{aligned}
$$

第一行证明基于 $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$。以 $\arcsin x$ 为例:

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{\arcsin x \to 0} \frac{\arcsin x}{\sin \arcsin x} = 1
$$

第二行证明实际基于 $\lim \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$，其实用到了 $\ln$ 的连续性，将在后面被说明。

第三行使用简单的三角代换，第四行使用分子有理化技巧。

等价无穷小的条件

$$
\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha = o(\alpha)
$$

说明 α 与 β 的充要条件是 $\beta = \alpha + o(\alpha)$。

无穷小的等价代换

在自变量同一变化过程中，若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则：

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

此为乘除代换。

若想要进行加减代换，一个充分条件是：

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq \pm 1 \Rightarrow \lim \frac{\beta \mp \alpha}{\beta' \mp \alpha'} = 1$$

证明比较类似糖水原理?

以 $\beta + \alpha$ 为例，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq -1$：

$$\lim \frac{\beta + \alpha}{\beta' + \alpha'} = \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\frac{\beta}{\alpha} + 1}{\frac{\beta'}{\alpha'} + 1} = \frac{c+1}{c+1} = 1$$

无穷大量

当 $x \to x_0$ 时，若 $y \to \infty$，则 y 称为 $x \to x_0$ 时的无穷大量。

特别地，若 $y \to \pm\infty$，我们分别称 y 为 $x \to x_0$ 时的正（负）无穷大。

与无穷小量的关系

在自变量同一变化过程下：

- 若 $f(x) \to \infty$，则 $\frac{1}{f(x)} \to 0$。
- 若 $f(x) \to 0, f(x) \neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)} \to \infty$。

这说明关于无穷大的问题都可以转化为关于无穷小的问题。

证明使用极限的定理。有些 trival。

运算性质

- 有限个无穷大量的乘积是无穷大量。
- 有界量和无穷大量的和是无穷大量。
- 注意因为无穷大包含正负，所以相加后不一定是无穷大量。

连续

若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

等价条件

$f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件为：$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ 使得 $\forall x \in U_\epsilon(x_0)$，$|f(x) - f(x_0)| < \delta$。

左连续与右连续

若 $f(x)$ 在 $U(x_0^-)$ 上有定义，$\lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处左连续。即 $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ 使得 $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$，$|f(x) - f(x_0)| < \delta$。

同理可定义右连续。

连续的等价条件为同时左连续和右连续。

连续函数

如果 $f(x)$ 在开区间 I 上的每一点连续，则 $f(x)$ 是 I 上的连续函数。

如果 $f(x)$ 在闭区间 I 内部处处连续，并在左端点右连续，右端点左连续，则 $f(x)$ 是 I 上的连续函数。

半开半闭区间同理。

我们将区间 I 上所有的连续函数构成的集合记作 $C(I)$。则 $f(x)$ 在 I 上连续就是 $f(x) \in C(I)$。

e.g.

对于 $\sin x$，任取 $x_0 \in \mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x + \Delta x) = \lim(\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x)$。

对于 $\sin x \cos \Delta x$，其极限为 $\sin x$。

对于 $\cos x \sin \Delta x$，有 $0 \le |\cos x \sin \Delta x| \le |\sin \Delta x|$，由夹逼定理知道 $\lim \cos x \sin \Delta x = 0$。

综上，$\lim \sin(x + \Delta x) = \sin x$，即 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

间断点

函数上不连续的点叫做间断点。

跳跃间断点

如果 x_0 处的左、右极限都存在，但 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

可去间断点

如果 x_0 处的极限存在，但是 $f(x_0)$ 不等于极限或不存在。此时可以改变 $f(x_0)$ 的定义，使得 $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$。称 x_0 为 $f(x_0)$ 的可去间断点。改变后的函数在 x_0 处连续。

以上两类统称第一类间断点，因为左右极限均存在。

无穷间断点

若 x_0 处的某个单侧发散到无穷，则称 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点。

震荡间断点

对于 x_0 处的某个单侧极限，若 $\exists M > 0$，使得 $f(x)$ 在大于 M 和小于 $-M$ 两处震荡无穷次，则 x 称为 $f(x)$ 的震荡间断点。

连续函数的性质

四则运算

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续：则 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$（$g(x) \neq 0$）均是连续函数。

由极限的运算法则可得。

局部有界

若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上局部有界。

由极限的有界性可得。

复合函数

引理

若 $\lim g(x) = u_0$，函数 $f(u)$ 在 u_0 连续，则 $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(u_0)$。

注意这个引理和极限复合法则的区别。极限复合法则有一个限制条件：

> $\exists\delta>0$ 当 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$g(x)\neq u_0$。

这是为了保证让 $u=g(x)$ 有一个靠近 u_0 的过程，才能保证外层 $f(u)$ 取的是极限。

但是在这里，$f(u)$ 是个连续函数，所以 $f(u_0)$ 必有定义，而且 $\lim f(u)=f(u_0)$，那么有没有靠近的过程就无所谓了，等号始终成立。

剩下的证明过程和极限的复合法则相似。

对于任意 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,x_n\in\mathring{U}(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=u_0$。

接下来，去除所有使得 $g(x_n)=u_0$ 的 x_n，记去除部分为 z_n，剩下的为 y_n。

若剩下的数仍有无穷项，则 $g(x_n)$ 的子列 $g(y_n)$ 仍以 u_0 为极限，且 $g(y_n)\in\mathring{U}(u_0)$。由 Heine 定理，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(g(y_n))=f(u_0)$。

若去除的部分有无穷项，则 $g(x_n)$ 的子列 $g(z_n)\equiv u_0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(g(z_n))=f(u_0)$。

所以 $f(g(x_n))$ 的两个子列极限都是 $f(u_0)$。注意到上述两个子列 $f(g(y_n)),f(g(z_n))$ 不可能都不存在，并且如果其中一个是有限项则不会影响原数列 $f(g(x_n))$ 的极限。那么根据数列的归并原理，$\lim\limits_{n\to\infty}f(g(x_n))=\lim\limits_{n\to\infty}f(g(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}f(g(z_n))=f(u_0)$。

所以，对于任意 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,x_n\in\mathring{U}(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(g(x_n))=f(u_0)$，则由 Heine 定理，$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(u_0)$。

此性质说明，当 $f(x)$ 是连续函数时，可以将括号外的极限符号放到括号里去。

复合函数的连续性

若 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续，则 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续。

由连续的定义，得到：$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=u_0$。

由引理，$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(u_0)$，又因为 $f(g(x_0))=f(u_0)$，所以 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续。

幂指函数

设 f,g 是 A 上的两个函数，若 $\forall x\in A,f(x)>0$，则形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数叫幂指函数。

我们容易发现，$f(x)^{g(x)}=\exp(g(x)\ln f(x))$。

不难验证 $\exp, \ln$ 都是连续函数，则当 f, g 是连续函数时，$f(x)^{g(x)}$ 也是连续函数。有：
$\lim \left(f(x)^{g(x)}\right) = (\lim f(x))^{(\lim g(x))}$。

初等函数

在这里，我们略过基本初等函数在定义域上都连续的证明，因为其过于冗长，没有新意。

综合上述证明，我们可以得到：一切初等函数在其定义域的任意区间上都连续。

回顾连续的定义，在区间内连续的意思是：在区间内部处处连续，在区间的闭端点单侧连续。

有界性

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

使用反证法：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对于 $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$，$f(x)$ 至少在一个区间上无界。

则可以构造一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，使得 $f(x)$ 在每个区间上都无界。由闭区间套定理，存在唯一 ξ 使得 $\lim a_n = \lim b_n = \xi$。由于 $f(x)$ 在 ξ 上连续，则根据连续性的局部有界性，存在 $U(\xi)$ 使得 $f(x)$ 在 $U(\xi)$ 内有界。与“在每个区间上都无界”矛盾。

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

注意必须是闭区间才能成立。比如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续，但无界。

最大值最小值定理

这个证明真是天才。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最值。

首先由于 $f(x)$ 有界，因此必有上确界 $\alpha = \sup f(x)$，下确界 $\beta = \inf f(x)$。我们将说明 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = \alpha$。下确界同理可证。

由上确界的定义，$\forall n \in \mathbb{N}_+$，必然存在 $x_n \in [a,b]$，使得 $\alpha - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le \alpha$。

由于 $x_n \in [a,b]$，由 Weierstress 定理，必然存在一个子列 ξ_n，使得 $\lim \xi_n = \xi$。由于 ξ_n 是 x_n 的子列，所以 ξ_n 对应的 x 中标号大于 n，则 $\alpha - \frac{1}{n} \le f(\xi_n) \le \alpha$。

这样，考虑数列 $f(\xi_n)$，由夹逼定理知道 $\lim f(\xi_n) = \alpha$。又因为 f 的连续性，则 $f(\lim \xi_n) = f(\xi) = \alpha$。所以上确界能取到。

介值定理

为什么要提前讲，因为我不知道怎么在没有介值定理的情况下给出反函数的性质。

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a) \neq f(b)$，则 $\forall v \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$，$\exists x \in (a,b)$，使得 $f(x) = v$。

证明：不妨设 $f(a) < f(b)$。

取 $m = \frac{a+b}{2}$。若 $f(m) = v$，则 $\exists x = m \in (a,b)$，使得 $f(x) = v$。否则若 $f(m) > v$，则构造 $[a_1, b_1] = [a, m]$；若 $f(m) < v$，构造 $[a_1, b_1] = [m, b]$。

如此可以构造闭区间套 $[a_n, b_n]$，使得 $v \in (f(a_n), f(b_n))$。设 $\lim a_n = \lim b_n = \xi$，由连续性和保序性得：$f(\xi) = \lim f(a_n) \leq v, f(\xi) = \lim f(b_n) \geq v$，所以 $f(\xi) = v$。又因为 $f(a) \neq v, f(b) \neq v$，则 $\exists x = \xi \in (a,b)$，使得 $f(x) = v$。

零点存在定理

若 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$。

这是介值定理的一个特例，也即当 $v = 0$ 时。

反函数

如果 $f(x)$ 是连续函数并在区间 I 内反函数存在，则反函数 f^{-1} 也是连续函数。

引理

在区间 I 上连续并存在反函数的函数必然严格单调，且它的反函数也严格单调。

考虑反证法：假设存在 $x_0, x_1, x_2 \in I$ 使得 $x_0 < x_1 < x_2$，$f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$。

令 $v = \frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}$，显然 $v \in (f(x_0), f(x_1))$，$v \in (f(x_2), f(x_1))$。则由介值定理，在 (x_0, x_1) 上存在 ξ_1 使得 $f(\xi_1) = v$，在 (x_1, x_2) 上存在 ξ_2 使得 $f(\xi_2) = v$。那么 f 的反函数根本不存在！

所以假设错误，即 $\forall x_0 < x_1 < x_2$，$(f(x_0) - f(x_1))(f(x_0) - f(x_2)) > 0$，即 $f(x)$ 严格单调。

不妨假设函数严格增。那么，$\forall y_1 > y_2$，$f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$，即 f^{-1} 单调增。

反函数的连续性

不妨假设 f, f^{-1} 单调增。对于 $y_0 = f(x_0) \in I_y$，$\forall \epsilon > 0$，设 $y_1 = f(x_0 - \epsilon), y_2 = f(x_0 + \epsilon)$。则由单调性，$\forall y \in (y_1, y_2)$，$f^{-1}(y) \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$。所以，取 $\delta = \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$，

则 $\forall y \in U_\delta(y_0)$，有 $f^{-1}(y) = U_\epsilon(x_0)$。说明 f^{-1} 连续。

注意上述区间要与 I 或 I_y 取交。如果 y_0 在 I_y 的边界，那么我们只考虑单侧的极限与连续。

一致连续

若 $f(x) \in C(I)$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得 $\forall x_0 \in I, \forall x \in U_\delta(x_0)$，都有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$，则我们称 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

换句话说，一致连续的意思是，存在一个收敛速度，使得每一点收敛到自身的速度都快于这个速度。即收敛速度有非零下界。此时 δ 的取值只和 ϵ 有关，和 x_0 无关。

闭区间一致连续

若 $f(x) \in [a, b]$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必然一致连续。此即康托定理。

考虑反证法：假设 $f(x)$ 不是一致连续，则 $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$，总有 $x, x' \in [a, b]$，满足 $|x - x'| < \delta$ 但是 $|f(x) - f(x')| \geq \epsilon$。

取 $\delta_n = \frac{1}{n}$，构造 $x_n, x'_n \in [a, b]$ 使得 $|x_n - x'_n| < \delta$ 但是 $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$。

由于 $x_n \in [a, b]$，则由 Weierstress 定理，必有收敛子列 $\lim x_{n_k} = \xi$。由于 $x_{n_k} - \delta_{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \delta_{n_k}$，则由夹逼定理，$\lim x'_{n_k} = \lim x_{n_k}$。由连续性，$\lim f(x_{n_k}) = \lim f(x'_{n_k})$，这与 $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$ 矛盾。所以假设不成立，原函数 $f(x)$ 必然一致连续。

这个证明和最大值最小值定理的证明思想高度相似，都是反证法、构造数列、利用闭区间 Weierstress 定理构造收敛子列、说明矛盾。

几何意义

一条一致连续函数的曲线可以用一系列 $\epsilon \times 2\delta$ 的矩形纸片覆盖住。

压缩映射

如果 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$，其中 $k \in (0, 1)$，那么称 f 是一个压缩映射。

压缩映射原理

如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个压缩映射，那么 f 有且仅有一个不动点。即有且仅有一个 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = x$。

任取 $x_0 \in \mathbb{R}$，构造迭代数列 $x_{n+1} = f(x_n)$。则 $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq k^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \cdots \leq k^n|x_1 - x_0|$。

那么，任取 x_n 与 x_{n+p}，$|x_n - x_{n+p}| \le |x_1 - x_0| \sum_{i=n+1}^{n+p} k^{i-1} \le |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}$。

这样，$\forall \epsilon > 0$，取 N 使得 $|x_1 - x_0| \frac{k^N}{1-k} < \epsilon$，即 $N = \lceil \log_k \frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|} \rceil$，那么 $\forall n > N$，$|x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k} < \epsilon$。则 $\{x_n\}$ 是柯西序列，必收敛到唯一极限。不妨设极限为 ξ，那么 $f(\xi) = \xi$，即有一个不动点。

最后若还有另一不动点 $\xi' \neq \xi$，则 $|f(\xi') - f(\xi)| = |\xi' - \xi| > k|\xi' - \xi|$，矛盾。

所以有且仅有一个不动点。

祝大家国庆快乐